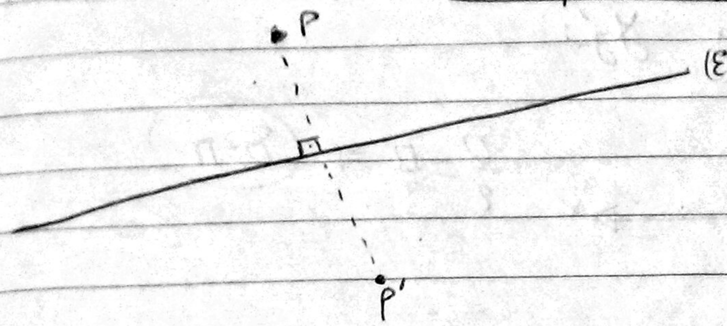
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧ. "ως προς ευθεία"

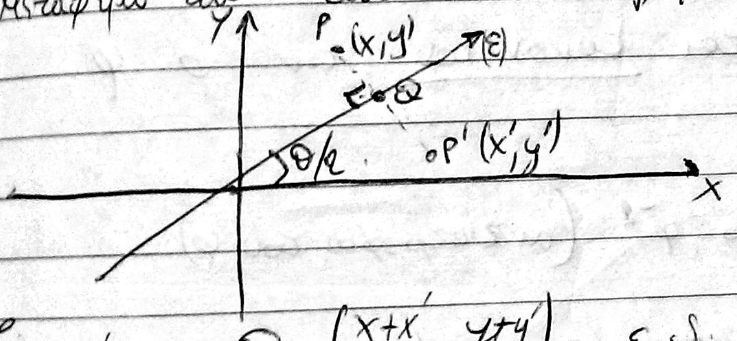


Η (ε) μεσοκάθετος του PP'

Άρα ο "κατοπτρισμός" ως προς ευθεία (ε) κάνει: $P \mapsto \varphi(P) = P'$:
ώστε: $OP = OP'$

Ζητάμε τώρα τον πίνακα του γρ. μετασχηματισμού:

· Μεταφέρω την ευθεία στην αρχή των αξόνων:



Ξέρω (ε): $y = \alpha x = tg\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot x$

$$(\varepsilon) = \boxed{y = tg\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot x}$$

Ξέρω ότι $Q = \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$. Επειδή (ε) μεσοκάθετος του PP'

Άρα η εξίσωση που περνά από τα $\underbrace{P_1(x_1, y_1)}_{P}$, $\underbrace{P_2(x_2, y_2)}_{P'}$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow y - y_1 = \underbrace{\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)}_{\lambda_2} \cdot (x - x_1)$$

Επειδή $PP' \perp (\varepsilon)$ ⇒ έχουν γινόμενο συντ. διευθ. $= -1$

Δηλ.

$$\lambda_2 \cdot \lambda_1 = -1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-1}{tg(\theta/2)}$$

Μετά από πράξεις:

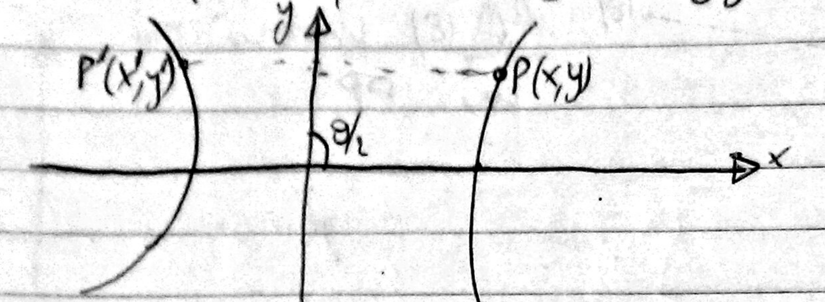
$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta \end{array} \right\}$$

Άρα ο πίνακας:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} \Rightarrow \text{Είναι γραμμικός!!!}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ανάκλαση ως προς τον άξονα yy':



$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pi$

Άρα $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\pi & \sin\pi\\ \sin\pi & -\cos\pi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας γραμ. γεωμ. μετασχ. λέγεται <u>κανονικός</u> αν ο φ είναι <u>1-1</u>.

▽ Προφανώς αν φ κανονικός ⇒ ∃ ο φ^{-1} (αντίστροφος του φ)

▽ Ένας γραμ. γεωμ. μετασχ. είναι κανονικός ⇔ $\det A \neq 0$ όπου A ο πίνακας του φ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(1) η Στροφή είναι κανονικός.
Επειδή ο $R_{O,\varphi}$ έχει πίνακα: $A = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$

2) Ανάκλαση ως προς ευθεία, είναι κανονικός.
Έχει πίνακα $\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -1 \neq 0$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) Ένας κανονικός γραμ. γεωμ. μετασχ., απεικονίζει: ευθείες σε ευθείες και πολύγωνα σε πολύγωνα.
Οι κορυφές των πολυγώνων που προκύπτουν με την εφαρμογή του φ, είναι οι εικόνες των αντίστοιχων κορυφών του αρχικού πολυγώνου.

2) Ένας κανονικός γραμ. γεωμ. μετασχ. είναι <u>επί</u>

Έστω $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ κανονικός $\to$ δηλ. 1-1, τότε $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\overset{\varphi=1\text{-}1}{\underset{\text{det}A\neq 0}{\Rightarrow}}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Άρα φ είναι <u>επί</u>

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας <u>κανονικός</u> γραμ. γεωμ. μετασχ.: $\varphi = \varphi^{-1}$ ($\Leftrightarrow \varphi^2 = Id$)
καλείται <u>Αυτοαντιστροφή</u>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) Ο κατοπτρισμός ως προς ευθεία (ε).
Έχει πίνακα $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Παρατηρώ ότι: ο $\varphi \circ \varphi$ έχει πίνακα τον $A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.
Άρα ο $\varphi^2 = Id$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Το $P_0 \in \mathcal{E}$ θα λέγεται <u>σταθερό σημείο</u> ως προς τον φ, αν $\varphi(P_0) = P_0$

Παρατήρηση

Ένας γεωμ. μετασχ. μπορεί να έχει "όσα θέλει" σταθερά σημεία.
Δεν συμβαίνει κάτι ιδιαίτερο.
- Ένα σταθερό σημείο: (<u>στροφή</u> κατά 0 < φ < 2π γωνία)
- Κανένα σταθερό: <u>παράλληλη μεταφορά</u>
- Άπειρα σταθερά σημεία: <u>ανάκλαση</u> ως προς ευθεία (ε).

ΣΥΝΘΕΣΗ (ΓΙΝΟΜΕΝΟ) ΓΕΩΜ. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

Ας συμβολίσουμε $\mathcal{L}(\mathcal{E},K)$ το σύνολο των γεωμ. μετασχ. φ, $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ως προς σημείο K.
Ορίζουμε στον $\mathcal{L}$ τη σύνθεση δύο γραμμ. μετασχ. $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E},K)$ ως $\Phi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{E},K)$

Για Γραμ. Γεωμ. Μετασχ.
Έστω A ο πίνακας του φ_1, B του φ_2.

Θέλουμε τυχόν $P'(x',y')$ μέσω του $\Phi = \varphi_2 \circ \varphi_1$
Τότε:
$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)(P') = \varphi_2(\varphi_1(P'))$$ και μέσω πινάκων γράφεται:

$$\boxed{\varphi(P') = BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.}$$

Δηλ.
$$\begin{tikzcd} P(x,y) \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_2 \circ \varphi_1"] & P'(x',y') \arrow[r, "\varphi_2"] & P''(x'',y'') \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Άρα $$\boxed{\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

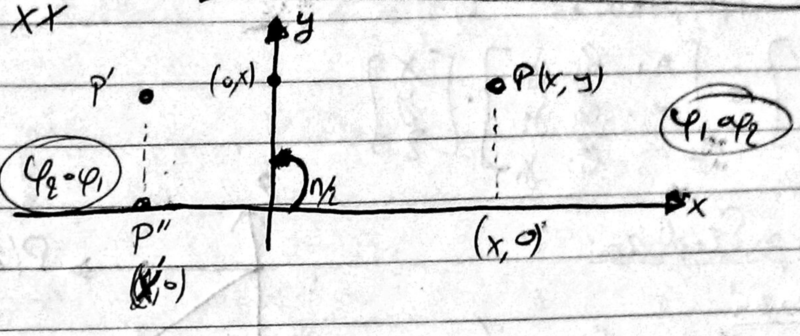
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Θεωρούμε τους γεωμ. μετασχ.:
φ_1: προβολή στον άξονα xx'
φ_2: προβολή στον άξονα yy'

Έστω (i) $P(x,y) \xmapsto{\varphi_1} P' \xmapsto{\varphi_2} P''$ $\rightarrow$ $P \xmapsto{\varphi_1} (x,0) \xmapsto{\varphi_2} (0,0)$
(ii) $P_2 \xmapsto{\varphi_2} P_2' \xmapsto{\varphi_1} P_2''$ $\rightarrow$ $P_2 \xmapsto{\varphi_2} (0,y) \xmapsto{\varphi_1} (0,0)$

Άρα συμπεραίνω: $\boxed{\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1}$ → Η σύνθεση (Αντιμετατίθεται)

2) φ_1: προβολή στον άξονα xx'
φ_2: στροφή $R_{O,\pi/2}$.

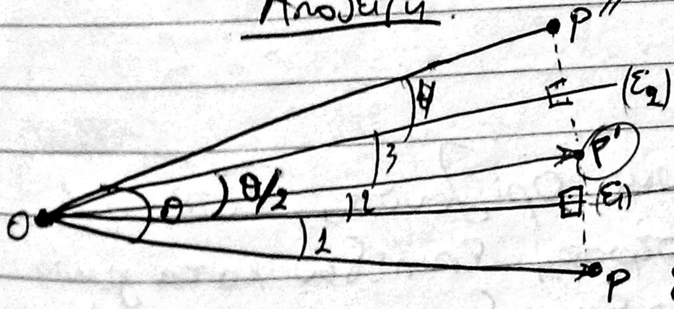


Άρα προφανώς $\boxed{\varphi_2 \circ \varphi_1 \neq \varphi_1 \circ \varphi_2}$

Συμπέρασμα
ΓΕΝΙΚΑ η σύνθεση δεν αντιμετατίθεται ΠΑΝΤΑ.

3) Κάθε στροφή $R_{O,\theta}$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο (σύνθεση) δύο γεωμ. μετασχ. φ_1, φ_2: που είναι ανακλάσεις ως προς ευθείες να τέμνονται στο O κ σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους $\theta/2$.

Απόδειξη.



Το $\overset{\triangle}{OPP'}$ ισοσκελές ($\vec{OP} = \vec{OP'}$)
Άρα οι $\boxed{\hat{O}_1 = \hat{O}_2}$ (1)
Ομοίως $\boxed{\hat{O}_3 = \hat{O}_4}$ (2)
Επίσης
$\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = \theta/2$

⇒ $\boxed{\hat{O}_1 + \hat{O}_4 = \frac{\theta}{2}}$

Άρα $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = \theta$ } Άρα $OP = OP''$ και $P\hat{O}P'' = \theta$ ∎

Και $\vec{OP} = \vec{OP'} \equiv \vec{OP''}$

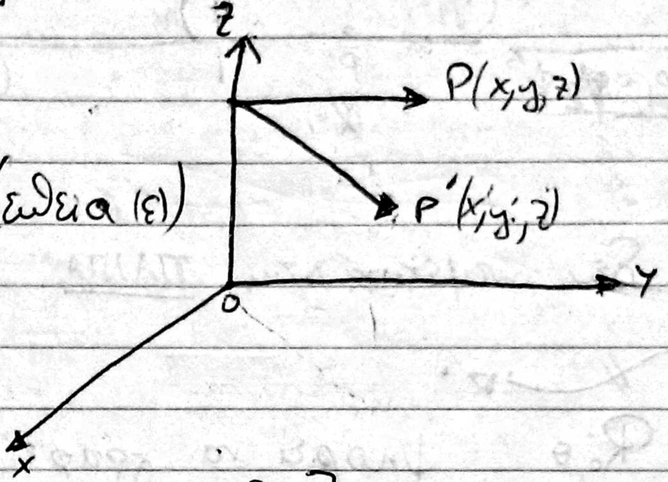
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ($\mathbb{R}^3$).

Όλα είναι ακριβώς αντίστοιχα με τον $\mathbb{R}^2$.

πχ για Γραμμικούς:

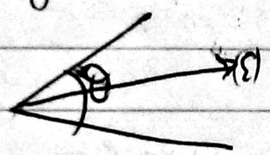
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα:



1) Στροφή:

Στροφή περί άξονα (ευθεία (ε)) κατά γωνία θ.



Δηλαδή: $\left\{ \begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned} \right\}$ στο Επίπεδο Oxy

(ουσιαστικά εκεί μελετάμε το πρόβλημα)

Θ. Euler

Έστω A ορθογώνιος πίνακας με θετική ορίζουσα, Τότε ο A έχει ιδιοτιμή το 1, και παριστάνει στροφή επιπέδου κατά γωνία θ με άξονα στροφής κάθετο στο επίπεδο αυτό.

(Αν A ο πίνακας του μετασχηματισμού τότε ο A είναι ορθογώνια ισοδύναμος με πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$)

Δηλ. $\exists P$: ορθογώνιος: ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Δηλ ο $V(1)$ ιδιόχωρος (άξονας στροφής)

ΔΧ ΝΔΟ: Ο πίνακας του φ, $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ Είναι στροφή επιπέδου περί άξονα στρέψης κάθετο στο επίπεδο
Ποια η γωνία στροφής; Ποιος ο άξονας;

ΛΥΣΗ

Από το Θ. <u>Euler</u>: (Α ορθογώνιος, $\det A = 1>0$) άρα παριστάνει στροφή περί άξονα.
Ο Α έχει ιδιοτιμή το 1.
Ο ζητούμενος άξονας στροφής είναι ο ιδιόχωρος $V(1)$.

Για να βρω τον $V(1)$ λύνω το σύστημα:

$$\begin{cases}(-\frac{2}{3}-1)x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z=0\\ (\frac{2}{3})x+(-\frac{2}{3}-1)y+\frac{1}{3}z=0\\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+(\frac{2}{3}-1)z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-5x-y+2z=0\\ 2x-5y+z=0\\ x+2y-z=0\end{cases} \xRightarrow{\text{πίνακα}} \underbrace{\begin{pmatrix}-5 & -1 & 2\\ 2 & -5 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}}_{B}$$

$\Rightarrow \boxed{\det B = 0} \Rightarrow$ άπειρες λύσεις.

Γνωρίζουμε ότι (για ομογενή συστήματα), αν N_T ο χώρος λύσεων
τότε $\dim N_T = \underset{\substack{\text{(πλήθος}\\ \text{αγνώστων)}}}{v} - \operatorname{rank}(B) = 3-2$

Διότι ο πίνακας έχει μία υποορίζουσα (2×2) $\begin{vmatrix}-5 & -1\\ 2 & -5\end{vmatrix} \neq 0$ και όσες την περιέχουν είναι 0.
Άρα έχει: $\operatorname{rank} B = 2$.
Άρα τελικά $\boxed{\dim N_T = 1}$

Άρα για τη λύση: $\begin{cases}-5x-y+2z=0\\ 2x-5y+z=0\end{cases}$ (οι δύο εξ. που είναι στη 2×2 υποορίζουσα που πήρα)

Άρα $z=t \Rightarrow \boxed{y=-5x+2t}$
$2x = 5(-5x+2t)-t \Rightarrow x=\frac{1}{3}t$, άρα $y=\frac{1}{3}t$
$z=t$

Άρα αν $(x,y,z)\in V(1) \rightarrow \boxed{V(1) = \langle t\cdot(\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)\rangle}$

Άρα ΔX για $t=3$ ένα ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}=(1,1,3)$

Άξονας Στροφής → $\boxed{V(1) = \langle t\,(1/3,\ 1/3,\ 1) \rangle}$

Γωνία Στροφής:

Ξέρω: $\exists\, P$ ορθογώνιος: ${}^tP A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Κανονικοποιούμε το $\vec{x}$: $\varepsilon_1 = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \left(\frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{3\sqrt{11}}{11}\right)$

Βρίσκω τον P:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \sqrt{11}/11 & \sqrt{2}/2 & -3/\sqrt{22} \\ \sqrt{11}/11 & \sqrt{2}/2 & -3/\sqrt{22} \\ 3\sqrt{11}/11 & 0 & 2/\sqrt{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Έστω ε_2: Έστω $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$: $\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon_1} = 0$

Δηλ.

$\frac{\sqrt{11}}{11}k_1 + \frac{\sqrt{11}}{11}k_2 + \frac{3\sqrt{11}}{11}k_3 = 0 \Longrightarrow$ πχ $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = 0 \end{cases}$

Επιλέγω ότι k_1, k_2, k_3 θέλω.

Άρα $\boxed{\varepsilon_2 = \frac{\vec{k_1}}{|\vec{k_1}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).}$

Έστω ε_3: Έστω $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ώστε : $\begin{cases} \vec{\lambda}\cdot\vec{\varepsilon_1} = 0 \\ \text{και } \vec{\lambda}\cdot\vec{\varepsilon_2} = 0 \end{cases}$

Λύσεις: $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-3}{2}\lambda_3}$

πχ για $\lambda_3 = 2$: $\vec{\lambda} = (-3, -3, 2)$

Άρα $\boxed{\vec{\varepsilon_3} = \frac{\vec{\lambda}}{\|\vec{\lambda}\|} = \left(\frac{-3}{\sqrt{22}}, \frac{-3}{\sqrt{22}}, \frac{2}{\sqrt{22}}\right).}$

Άρα βρήκα τον P.

[Τα δ/τα $\vec{e}_2$ $\hat{e}_3$ καθορίζουν το επίπεδο περιστροφής.]

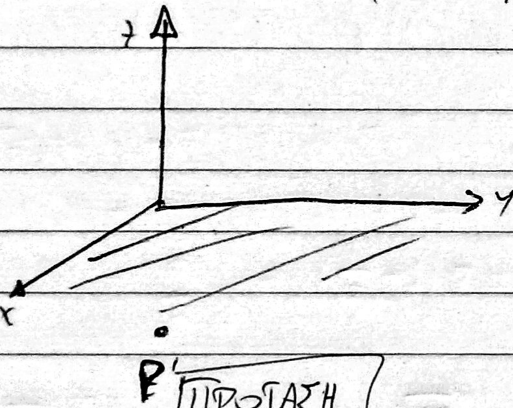
Έχω τον P. Άρα $^{t}PAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & \sqrt{11}/6 \\ 0 & -\sqrt{11}/6 & -5/6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\boxed{\text{Γωνία στροφής } \theta: \ \begin{cases} \cos\theta = -5/6 \\ \sin\theta = -\sqrt{11}/6 \end{cases}}$$

Εφαρμογή 1

1) "Ανάκλαση" στο χώρο, ως προς επίπεδο.

h έχω $(x,y,z) \longmapsto (x,y,-z)$



ΠΡΟΤΑΣΗ

2) Ένας γραμμ. μετασχ. είναι κανονικός $\Leftrightarrow$ η ορίζουσα $\det(A) \neq 0$